EUROPEAN ACADEMIC RESEARCH
Vol. XI, Issue 11/ February 2024

Impact Factor: 3.4546 (UIF)
DRJI Value: 5.9 (B+)

ISSN 2286-4822
www.euacademic.org

Aplicação de Equações Diferenciais Ordinárias na Resolução de Problemas com Modelagem

ANTÔNIO ANDRÉ PEREIRA DE SOUSA[1]
Graduando do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário INTA-UNINTA
DAVID OLIVINDO XAVIER[2]
Graduando do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário INTA-UNINTA
FRANCISCO EIDAS PONTE DOS SANTOS[3]
Graduando do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário INTA-UNINTA
ERICK JANSEN DUARTE CAVALCANTE[4]
Graduando do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário INTA-UNINTA
JOSÉ RODRIGUES NETO[5]
Graduando do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário INTA-UNINTA
MONALISA LOPES DA CUNHA[6]
Graduanda do curso de Engenharia Civil do Centro Universitário INTA-UNINTA
LUZITELMA MARIA BARBOSA DE CASTRO[7]
Profa.Centro Universitário INTA-UNINTA

Resumo

A modelagem com Equações Diferencias Ordinárias – EDO possibilita uma análise aprofundada na solução de problemas de ordem populacional, ecológicos, econômicos e mais. Nessa perspectiva, o presente trabalho acadêmico busca expor de forma didática e simples a apresentação de soluções metodológicas do uso das EDO na elucidação de situações complexas. A metodologia aplicada se baseia no estudo de autores referenciais para demostrar o quanto a modelagem com EDO auxilia na interpretação de complexos temas da engenharia, estatística e física.

Palavras-chave: EDO, modelagem, engenharia.

Abstract

Modeling with Ordinary Differential Equations – ODE enables an in-depth analysis in the solution of population, ecological, economic and more problems. In this perspective, the present academic work seeks to expose in a didactic and simple way the presentation of methodological solutions for the use of ODE in the elucidation of complex situations. The methodology applied is based on the study of reference authors to demonstrate how much modeling with ODE helps to the interpretation of complex engineering, statistics and physics topics.

Keywords: EDO, modeling, engineering.

INTRODUÇÃO

No estudo das ciências exatas é visto predominantemente equações diferenciais e algumas exemplificações e aplicações, tanto no meio secular quanto no cotidiano da vida. Após um certo tempo de pesquisa em grupo sobre o assunto abordado neste artigo, foi decidido unanimamente que seria relatado o tema Modelagem Com Equações Diferenciais Ordinárias. O objetivo desse artigo é mostrar o que é uma equação

[1] Email: sousaandre099@gmail.com
[2] Email: davidolivindoxavier.oly@gmail.com
[3] Email: eidasponte@hotmail.com
[4] Email: erick050567@gmail.com
[5] Email: joserneto97@gmail.com
[6] Email: monalisacunha.eng@gmail.com
[7] Email: luzitelm@gmail.com

diferencial ordinária (EDO), como podemos utiliza-la na aplicação de várias situações do cotidiano e que trabalhar com a mesma, requer conhecer algumas de suas propriedades e definição.

A Equação Diferencial Ordinária (EDO) é usada para resolver problemas específicos, encontrar a solução quando esta se encontra como um problema de valor incial para tal problema ou se tal solução é única. Rogério Piva faz uma síntese bem apurada de sua definição, quando disserta:

“Uma equação diferencial é uma equação que envolve uma função incógnita e suas derivadas. De modo geral, toda equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, denominaremos como equação diferencial (ED). (...)”. PIVA, ROGÉRIO. 2016.

Conforme o que disse Celso Faria de Souza (SOUZA, 2018; p. 91), entende- se a matemática, em relação às EDOs, como uma forma muito importante na física, química e principalmente na engenharia, em como podemos usar a modelagem como ferramenta de encontrar soluções e de uma forma eficaz, com entendimento e tornando um meio bem mais prático e prazeroso.

Em suas definições, as EDOs podem ser definidas em vários tipos. Mostra-se entre elas as lineares, onde suas soluções podem ser somadas a fim de produzir novas soluções e as homogêneas, em geral, sendo uma equação diferencial ordinária de primeira ordem é representada por $dt/dy = f(t,y)$, onde f é uma função nas variáveis t e y. O que garante a existência de tais soluções é o teorema da existência e união de soluções para equações diferenciais de primeira ordem, que sob certas condições asseguram a existência de um intervalo que tal solução está definida.

Com base nesses modelos, será abordado e observado um tipo de modelagem com EDO por população no município de Sobral, no Ceará, onde observará em um certo período de tempo o seu crescimento levando em consideração alguns fatores socioeconômicos e apresentar conclusões para os resultados encontrados.

DESENVOLVIMENTO

Para desenvolvimento do trabalho, foi realizado um estudo sobre as Equações Diferenciais Exatas (EDO), suas aplicações e feito um levantamento teórico dos dados acerca da população do município de Sobral - CE, através do site do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) no período de 2010 a 2021 de modo a entender processo de resolução e compreender resultados relacionados à situação socioeconômica de Sobral obtidos através de (EDO).

O modelo escolhido foi o de dinâmica populacional Exponencial ou de Malthus Thomas, apresentado em 1798. Este modelo pressupõe que a taxa segundo a qual a população de um local cresce em um determinado instante é proporcional à população total do local naquele instante. Desta forma, conseguimos ter uma projeção de população a qualquer tempo desejado. Sendo assim, é representado pela fórmula:

$$\frac{dP}{dt} = k.P$$

Onde k é uma constante de proporcionalidade ($k > 0$), e sabendo que determinada população cresce no decorrer do tempo e que $P(0) = P_0$, então:

$$P = Po.\, e^{k.t}$$

P = população no decorrer do tempo
P_0 = população inicial
t = tempo

Durante o estudo, foi considerado que a população do município cresceu 12,86% em 11 anos no período de 2010 a 2021 analisando o tempo em que ela duplicará, e qual é o cenário socioeconômico do período após o crescimento.

Sendo assim, a população em 2010 era de 188.233 (cento e oitenta e oito mil duzentos e trinta e três) habitantes e em 2021 de 212.437 (duzentos e doze mil quatrocentos e trinta e sete) habitantes, totalizando um aumento entre os anos de 24.204 (vinte e quatro mil duzentos e quatro) habitantes.

Ao analisar o crescimento populacional, durante este período, consideraremos também avaliar condições socioeconômicas do local, sendo considerado, PIB per capita municipal e mortalidade infantil, ou seja, população, renda e crescimento populacional que são fatores muito importantes neste tema em estudo. Alguns destes fatores citados serão confirmados a frente utilizando a mesma ferramenta (EDO).

Aplicando os dados obtidos na fórmula para crescimento populacional, $P(\text{t}) = Po.\, e^{k.t}$ teremos: Para $t = 0$, $P(0) = 188.233$

Para $t = 11$, $P(11) = 212.437$

$$P(\text{t}) = Po.\, e^{k.t}$$
$$P(11) = P_0 e^{11k}$$
$$212.437 = 188.233 e^{11k}$$
$$e^{11k} = \frac{212.437}{188.233}$$
$$e^{11k} = 1{,}128585317$$
$$lne^{11k} = ln1{,}128585317$$
$$11k = 0{,}120964916$$
$$k = \frac{0{,}120964916}{11}$$
$$k = 0{,}01099681 \approx 0{,}011$$

Aplicando a constante de proporcionalidade (k) para avaliar o tempo em que a população dobrará: Para $P = 2.Po$, K = 0,011 e t = ?

$$P = Poe^{k.t}$$
$$2Po = Po.\, e^{k.t}$$
$$ln\, 2 = ln\, e^{0{,}011.t}$$
$$0{,}69314718 = 0{,}011t$$
$$t = \frac{0{,}69314718}{0{,}011}$$
$$t = 63{,}01\ anos$$

Prova real:
$P = Po.\, e^{k.t}$
P = 188.233. e0,011x63,01
P = 376.452 $habitantes$

Seguindo o mesmo padrão de raciocínio, utilizaremos EDO para a calcular um outro fator socioeconômico muito relevante, o PIB per capita municipal. Onde, o PIB per capita municipal (divisão do PIB pelo número de habitantes), mede quanto do PIB caberia a cada indivíduo de uma cidade se todos recebessem partes iguais.

Durante o estudo, foi identificado incialmente que o PIB per capita municipal cresceu 57,34% em 10 anos no período de 2010 a 2020 (ano do último senso). Analisaremos o tempo em que ela duplicará, e qual é o cenário socioeconômico do período após o crescimento. Sendo assim, o PIB per capita municipal no ano de 2010 era de R$ 13.564,41 (treze mil quinhentos e sessenta e quatro reais e quarenta e um centavos) e em 2020 de R$ 21.343,10 (vinte um mil trezentos e quarenta e um reais e dez centavos), totalizando um aumento entre os anos de 2010 a 2020 de R$7.778,69 (sete mil setecentos e setenta e oitos reais e sessenta e nove centavos).
Aplicando os dados obtidos na fórmula, teremos:

Para t = 0, temos P = $13.564,41$

Para t = 10, temos P(10) = $21.343,10$

$$P = Po.\, e^{kt}$$
$$P(10) = Po.\, e^{k.10}$$
$$21.343,10 = 13.564,41e^{10k}$$
$$e^{10k} = \frac{21.343,10}{13.564,41}$$
$$e^{10k} = 1,57346$$
$$lne^{10k} = \ln 1,57346$$
$$10k = ln1,57346$$
$$k = 0,04533$$

Aplicando a constante de proporcionalidade (k) para avaliar o tempo em que o PIB per capita municipal dobrará:
Para P = 2.Po, K = 0,0453 e t = ?

$$P = Poe^{k.t}$$
$$2Po = Po.\, e^{k.t}$$
$$ln\ 2 = ln\ e0,0453.t$$
$$0,69314718 = 0,0453t$$
$$t = \frac{0,69314718}{0,0453}$$
$$t\ =\ 15,30\ anos.$$

Prova real:
$P = Poe^{k.t}$
P = 13.564,11. $e^{0,0453.15,30}$
P = 27.126,67 $reais$

Agora, utilizando EDO para a calcular outro fator socioeconômico tão importante quanto o PIB per capita municipal, analisaremos a taxa de mortalidade infantil durante um período de 11 anos. Onde, a mortalidade infantil é um importante indicador de saúde e condições de vida de uma população. Com o cálculo da sua taxa, estima-se o risco de um nascido vivo morrer antes de chegar a um ano de vida. Durante esta análise, foi identificado incialmente que a taxa de mortalidade infantil de Sobral era de 60 óbitos no ano de 2009. Onde, esta taxa decresceu 55% em 11 anos no período de 2009 a 2020 (último senso), ano que ocorreu 33 mortes.

Analisaremos o tempo em que ela decairá e tenderá ao mínimo, ou seja, 1 óbito. Aplicando os dados obtidos na fórmula, teremos:

Para t = 0, temos P = 60
Para t = 11, temos P (11) = 33

$$P = Poe^{kt}$$
$$P = Po.\, e^{kt}$$
$$P(11) = Po.\, e^{11k}$$
$$33 = 60e^{11k}$$
$$e^{11k} = \frac{33}{60}$$
$$e^{11k} = 0{,}55$$
$$lne^{11k} = \ln 0{,}55$$
$$11k = ln0{,}55$$
$$k = -0{,}0543488$$

Aplicando a constante de proporcionalidade (k) para avaliar o tempo em que a taxa de mortalidade infantil com idade inferior a um ano tenderá apenas 1 óbito:
$P = Po.\, e^{k.t}$

$$\frac{1}{60}P_0 = P_0e^{kt}$$
$$ln\frac{1}{60} = lne^{-0{,}0543488t}$$
$$-4{,}0943 = -0{,}0543488t$$
$$t = \frac{-4{,}0943}{-0{,}0543488}$$
$$t \approx 75{,}33\ anos.$$

Prova real:
$P = Po.\, e^{k.t}$
$P = 60\ .\ e{-}0{,}0543488x75{,}33$
$P = 1\ óbito$

CONCLUSÃO

Com o que foi apresentado diante da realização desta pesquisa, é perceptível notar a importância das EDO's devido as informações que ela nos possibilita encontrar. Quando bem manuzeadas, é possível torna-las lineares, facilitando a busca de qualquer informação dentro do contexto proposto, bem como fazer previsões, bastando para isso definirmos as variáveis responsáveis pela variação do sistema. Ao definirmos a constante de proporcionalidade seguindo os parâmetros e dados a serem informados, nos deparamos com o modelo matemático capaz de nos colocarmos diante de problemas de razoável solução. Dentre esses modelos elencamos: a Dinâmica Populacional, Decaimento Radiotivo, Disseminação de uma doença, Reações Qúimicas, Mistura, Drenagem de um tanque, Circuito em série, Corpos em queda, Cabos suspensos, Orçamento familiar, entre outros.

Essa investigação deixou claro que, a modelagem matemática exerce diferentes papeis e é ferramenta poderosa capaz de transformar os modelos matemáticos em problemas acessíveis e de fácil compreensão. Com as EDO's seremos capazes de chegar muito próximo dos valores reais e de fazermos estimativas passadas ou futuras.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011

GIARDINETTO, J. R. B. **Matemática escolar e Matemática da vida cotidiana**. Autores Associados, 1999.

IBGE – INSTITUTO BRASILEIRO DE GEOGRAFIA E ESTATÍSTICA. População e território. Sobral: IBGE, 2023. Disponível em: IBGE | Cidades@ | Ceará | Sobral | Panorama. Acesso em: 30 de abril de 2023

MELO, I.R.S., SILVA, J.E.L., NASCIMENTO, J.B., & FRANCO, C.M.R. **Dinâmica populacional e economia: uma aplicação com modelos de equações diferenciais**. CONAPESC, 2018. Disponível em: https://www.editorarealize.com.br/editora/anais/conapesc/2018/TRABALHO_EV107_MD1_SA10_ID1054_26052018172848.pdf. Acesso em 30 de abril de 2023

PIVA, R**. Modelos Matemáticos e Equações Diferenciais Ordinárias**. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, 2016.

SOUZA, C, F de. Equações Diferenciais Ordinárias na Modelagem e Solução de Problemas de Engenharia. GOIÂNIA, 2018. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/8922/5/Dissertação%20-%20Celso%20Faria%20de%20Souza%20-%202018.pdf. Acesso em: 27 de maio de 2023

TAVONI, R., & OLIVEIRA, R.Z.G. **Os modelos de crescimento populacional de Malthus e Verhulst - uma motivação para o ensino de logaritmos e exponenciais**. Rio Claro, 2013.